



Kivistö Pinja-Sofia

Matematiikkakuvan osa-alueet ja myönteisen matematiikkakuvan tukeminen matematiikan
opetuksessa

Kandidaatintutkielma
KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA
Erityispedagogiikka
2019

Oulun yliopisto

Kasvatustieteiden tiedekunta

Matematiikkakuvan osa-alueet ja myönteisen matematiikkakuvan tukeminen matematiikan opetuksessa (Pinja-Sofia Kivistö)

Kandidaatin tutkielma, 31 sivua,

Huhtikuu 2019

Avainsanat: matematiikkakuva, matematiikka-ahdistus, saavutustunteet, minäpystyvyys, matematiikan oppiminen

Matematiikkakuvan osa-alueet ovat matematiikan oppimiseen liittyvät tunteet, uskomukset sekä motivaatio matematiikan oppimista kohtaan. Matematiikkakuvan osa-alueet vaikuttavat toisiinsa, ja oppilaan matematiikkakuva vaikuttaa matematiikan oppimiseen sekä suoritukseen matematiikassa. Uskomuksiin sisältyy minäpystyvyysusko omasta osaamisestaan sekä minäkuva matematiikan oppijana. Matematiikka-ahdistus ja Pekrunin määrittelemät saavutustunteet vaikuttavat matematiikan oppimisessa.

Opiskelijan suoriutuessa hyvin hänen minäpystyvyysuskonsa omasta osaamisestaan paranee, ja minäpystyvyysusko omasta osaamisesta vaikuttaa myöhempään suoritukseen. Heikko suoriutuminen matematiikassa aiheuttaa matematiikka-ahdistusta. Matematiikka-ahdistuksen on todettu vaikuttavan myöhempään suoritukseen matematiikassa negatiivisesti, mutta on myös todettu, ettei matematiikka-ahdistus vaikuta myöhempään suoritukseen matematiikassa. Matematiikka-ahdistus häiritsee työmuistin toimintaa keskittämällä huomion enemmän huoliin kuin matematiikan tehtävän tekemiseen.

Oppilaan matematiikkakuvaa tuetaan tukemalla oppilaan matematiikan oppimista kokonaisvaltaisesti. Oppilaan saamat onnistumisen kokemukset, myönteinen oppimisilmapiiri ja kannustus oppimiseen tukevat oppilaan matematiikkakuvaa. Varhainen matematiikka-ahdistuksen tunnistaminen, oppilaiden motivationaalisten taipumusten tunnistaminen sekä minäpystyvyyden tunnistaminen ovat tärkeitä toimia. Oppilaiden tekemiin virheisiin tulee suhtautua myönteisesti luonnollisena osana oppimista. Virheelliset vastaukset tulisi käyttää osana oppimista.

Sisältö

1	Johdanto	4
2	Tutkimuskysymykset ja tutkimusmenetelmä	5
3	Matematiikan oppiminen.....	6
3.1	Matematiikan oppimisen erityispiirteitä	6
3.2	Vaikeudet matematiikan oppimisessa.....	7
4	Matematiikkakuvan muodostuminen.....	9
4.1	Asenteet.....	9
4.2	Uskomukset.....	10
4.3	Tunteet	13
4.4	Motivaatio	18
4.5	Miniteoriat.....	19
5	Matematiikkakuvan tukeminen	21
6	Johtopäätökset	23
7	Pohdinta.....	25
	Lähteet.....	27

1 Johdanto

McLeod (1992) toi 1990-luvulla esille, että Yhdysvalloissa on taipumusta uskoa matematiikan oppimisen olevan enemmänkin kyky kuin ponnistus. 1800-luvulla ajateltiin matematiikan opiskelun kuuluvan vain matemaattisesti lahjakkaille ihmisille (Linnanmäki, 2004, 241). Oppimista ei ymmärretä nykyään ainoastaan lahjakkaiden kykynä. Oppiminen on prosessi, jossa aivojen vastaanottamat ärsykkeet ja niiden väliset vaikutussuhteet jättävät muistijäljen hermoverkon toimintaan (Korhonen, 2006, 200). Oppimisprosessia ohjaavat useat tekijät, kuten oppilaan kiinnostuksen kohteet, tunteet, kokemukset ja käsitykset itsestä oppijana (POPS, 2014, 17). Oppilaan matematiikan oppimiseen vaikuttaa oppilaan matematiikkakuva, joka tarkoittaa oppilaan tunnesuhtautumista matematiikkaan, matematiikkaan liittyviä uskomuksia ja motivaatiota matematiikkaa kohtaan (Hannula & Holm, 2018, 132).

Oppimiseen ja hyvinvointiin koulussa vaikuttavat oppilaan huolet suoriutumisestaan (Lauermann, Eccles & Pekrun, 2017). Epäonnistuminen matematiikassa saattaa aiheuttaa tunnetta, että on muita tyhmempi, ja näin opiskelijat kokevat epävarmuutta, itseluottamus heikentyy ja syntyy pelkoa epäonnistumisesta matematiikassa (Huhtala & Laine, 2004, 322). Opetussuunnitelman mukaan matematiikan opetuksen tulee tukea oppilaiden myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan ja positiivista minäkuvaa matematiikan oppijana (POPS, 2014, 374). Opetussuunnitelmassa jokaisessa perusopetuksen vuosiluokassa mainitaan matematiikan oppimisen tavoitteessa oppilaan myönteisen minäkuvan kehittäminen.

Negatiivisen matematiikkakuvan omaava oppilas luovuttaa helpoissakin tehtävissä helposti, mikä johtaa uusiin ikäviin matematiikkakokemuksiin sekä osaamattomuuden tunteisiin, ja näin oppilas joutuu matematiikkavaikeuksien kierteeseen (Huhtala & Laine, 2004, 329). Matematiikkakuvaa on vaikea muuttaa myönteiseksi sen ollessa jo muuttunut kielteiseksi (Hannula & Holm, 2018, 149). Huhtala & Laine (2004, 344) tekstissään toteavat: ”kaikilla oppilailla pitäisi olla oikeus kokea, että matikka on mun juttu”.

Koulun ja opetuksen tehtävä on kehittää oppilasta. Näen tämän ristiriidassa sen kanssa, että oppilaat kokevat huolia matematiikan oppimisessa ja huolestuvat suorituksestaan. Tässä tutkielmassa pyritään selvittämään, mitkä ovat oppilaan matematiikkakuvan osa-alueet ja miten ne ovat yhteydessä matematiikassa suoriutumiseen. Tulevana erityisopettajana matematiikkakuvan osa-alueiden merkityksen tiedostaminen matematiikan oppimisessa on tärkeää, jotta voidaan tukea oppilasta. Tutkielmassa selvitetään myös, miten oppilaan matematiikkakuvaa voidaan tukea.

2 Tutkimuskysymykset ja tutkimusmenetelmä

Matematiikan oppimiseen vaikuttavat useat tekijät. Oppilaan matematiikkakuva on yksi matematiikan oppimisen taustalla oleva tekijä. Kandidaatintutkielmani tarkoituksena on määrittää matematiikkakuvan osa-alueet ja selvittää, miten matematiikkakuvan osa-alueet vaikuttavat suoriutumiseen matematiikassa.

Tutkimuksessa vastataan seuraaviin kahteen kysymykseen:

1. Mitkä ovat matematiikkakuvan osa-alueet, ja miten ne vaikuttavat suoritukseen matematiikassa?
2. Miten oppilaan myönteistä matematiikkakuvaa voidaan tukea?

Tässä tutkimuksessa käytetään tutkimusmenetelmänä kuvailevaa kirjallisuuskatsausta. Kirjallisuuskatsauksen laatiminen tarjoaa opiskelijalle oppimisen mahdollisuuden (Hirsjärvi, Remes & Sajavaara, 2005, 112-113). Salmisen mukaan (2011, 4) kuvaileva kirjallisuuskatsaus on yleiskatsaus, jossa tehdään tutkimusta tutkimuksesta. Hirsjärven ym. (2005, 112) mukaan kirjallisuuskatsauksen tarkoitus on näyttää, miten asiaa on aiemmin tutkittu ja millaisista näkökulmista on tutkittu.

Kirjallisuuskatsaus keskittyy tutkimusongelman kannalta olennaiseen kirjallisuuteen (Hirsjärvi ym., 2005, 111). Kirjallisuuskatsauksessa aineiston valintaa eivät rajaa metodiset säännöt, vaikka ilmiö kuvataan laaja-alaisesti (Salminen, 2011, 6). Kirjallisuuskatsauksessa olemassa oleva tieto arvioidaan ja eritellään huolellisesti. Kirjallisuuskatsausta laatiessa on ajateltava kriittisesti ja arvioitava kriittisesti erilaisia näkökulmia toisiinsa suhteuttaen, sillä näkemyserot ja ristiriitaisuudet on pyrittävä tutkimuksessa osoittamaan. Kirjallisuuskatsausta laatiessa täytyy olla tulkintaa tehdessä rehellinen ja ristiriitaisia tutkimistuloksia esitellessä objektiivinen. (Hirsjärvi ym., 2005, 112-113.)

3 Matematiikan oppiminen

Tässä luvussa käsitellään, mikä on keskeistä matematiikan oppimisessa. Aunolan & Nurmen (2018, 64) mukaan matematiikan oppiminen eroaa lukemaan oppimisesta. Lukutaidon oppiminen saattaa edetä vauhdikkaasti oppilaan oivallettua periaatteen kirjain-ääne-vastaavuudesta. Matematiikan oppiminen vaatii paljon harjoitusta, sillä matematiikassa edetään yksinkertaisemman osataidon oppimisesta kohti monimutkaisempia taitoja. (Aunola & Nurmi, 2018, 64.) Kuten kaikessa oppimisessa, myös matematiikan oppimisessa esiintyy vaikeuksia. Tässä kapaleessa selvitetään lisäksi, millaisia tekijöitä voi olla osallisena matematiikan vaikeuksissa.

3.1 Matematiikan oppimisen erityispiirteitä

Matematiikan oppimisessa edetään yksinkertaisemman osataidon oppimisesta kohti monimutkaisempia taitoja (Aunola & Nurmi, 2018, 64). Määrälliset kyvyt ovat tärkeä perusta monimutkaisemmalle matematiikan oppimiselle (Geary, 2011). Aunio ja Räsänen (2016) mukaan numeeriset taidot jaetaan neljään pääryhmään: 1) lukumääräisyyden taju, 2) matemaattisten suhteiden ymmärtäminen, 3) laskemistaidot ja 4) aritmeettiset perustaidot. Kyseisten taitojen kehitykset ovat yhteydessä keskenään. Lasten taidot kehittyvät laskemistaidoista kohti aritmeettisiä perustaitoja, sillä aritmeettiset tehtävät ratkaistaan ensin perustuen laskemistaitoihin ja faktojen hakemisesta muistista. Näitä tukevat symbolinen ja ei-symbolinen numeerinen taju sekä matemaattisten suhteiden ymmärtäminen. (Aunio & Räsänen, 2016.)

Varhaiset aritmeettiset taidot ovat tärkeitä matematiikassa suoriutumiseen (Geary, 2011), ja myöhempää matemaattista osaamista on todettu ennustavan myös varhaiset lukujonotaidot (Aunola & Nurmi, 2018, 59). Varhaislapsuudessa numero-sana -lukujonosta alkaa laskemisen oppiminen (Aunio & Niemivirta, 2010). Laskemis- ja suhdetaidot ennen kouluikää ennustavat aritmeettisiä perustaitoja ja suoriutumista matematiikassa ensimmäisellä luokka-asteella (Aunio & Niemivirta, 2010). Ensiarvoisen tärkeää on tukea lasten varhaisia matematiikan taitoja oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisyyn vuoksi (Aunio, Hannula & Räsänen, 2004, 219). Monosen, Aunio, Hotulaisen ja Ketosen (2013) mukaan suurimmalla osalla ensimmäisen luokan aloittavilla lapsilla oli koulun alussa hyvät matematiikan taidot. Kuitenkin ensimmäisellä luokalla oli myös oppilaita, joiden taidot olivat huomattavasti heikompia verrattuna tavanomaisesti osaavien lasten taitoihin. Kyseisiä heikompia taitoja olivat laskemisen osa-alueen tehtävät. (Mononen ym., 2013.)

Matematiikan oppimisen kannalta on keskeistä oppimiseen ja tiedonkäsittelyyn liittyvät toiminnot, kuten tarkkaavaisuus, työmuisti, säilömuistin varastoituneen tiedon aktivointi ja ongelmanratkaisu (Kyttälä & Kanerva, 2018, 220). Vaikka laskemaan oppiminen eroaa lukemaan oppimisesta (Aunola & Nurmi, 2018, 64), laskemaan oppiminen on samanlainen prosessi kuin sujuvan lukutaidon oppiminen, sillä molempiin vaikuttavat nopea sarjallinen nimeäminen (Koponen, Aunola, Ahonen & Nurmi, 2007).

Yksilölliset erot matematiikan suorituksessa kasvavat isommaksi ajan myötä. Lapsilla, jotka aloittavat esikoulun korkeilla matematiikan taidoilla, kehittyvät matematiikan taidot nopeammin kuin niillä, jotka aloittivat esikoulun matalimmilla taidoilla. (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004.)

3.2 Vaikeudet matematiikan oppimisessa

Matemaattisia oppimisvaikeuksia esiintyy noin 15-20 prosentilla lapsilla ja nuorista. (Mononen ym., 2017, 47). Matemaattiset oppimisvaikeudet jakautuvat dyskalkuliaan ja heikkoon osaamiseen matemaattisissa taidoissa. Dyskalkulia on kehityksellinen häiriö, jossa vaikeudet ilmenevät erityisesti peruslaskutaidoissa, ja vaikeudet johtuvat kognitiivisissa ja neurologisissa toimintoissa olevista häiriöistä lukumääräisyyden ymmärtämisessä ja prosessoinnissa. (Mononen ym., 2017, 47.) Dyskalkulia määritellään puutteeksi, joka rajoittuu laskutaitoon (Linnanmäki, 2004, 241). Puolestaan heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa -ryhmässä vaikeudet ovat pienempiä kuin dyskalkuliassa. Kyseiset vaikeudet johtuvat kognitiivisista, motivationaalista ja oppimisympäristöllisistä tekijöistä (Mononen ym., 2017, 47).

ICD-10 tautiluokitukseen kuuluu F81.2 laskemiskyvyn häiriö, johon kuuluu kehityksellinen laskemiskyvyttömyys, kehityksellinen laskemishäiriö, kehityksellinen Gerstmannin oireyhtymä ja dyskalkulia (Terveystieteiden tutkimuskeskus, 2011, 274).

Lapsilla, joilla on matemaattisia vaikeuksia, esiintyy myös työmuistin puutetta (Andersson & Lyxell, 2007), ja varhaisia matematiikan vaikeuksia omaavat lapset erosivat ikäisistään työmuistin resursseissa, kielitaidoissa ja ei-verbaalisessa muuttuvasta älykkyydessä (Kyttälä, Aunio & Hautamäki, 2010). Anderssonin & Lyxellin (2007) mukaan lapset, joilla oli sekä matemaattisia että lukemiseen liittyviä vaikeuksia, suoriutuivat huonommin laskemisen alueen tehtävistä ja visuaalisen matriisin alueen tehtävistä. Työmuistin keskusyksikön puute rajoittaa samanaikaista numeerisen informaation prosessointia ja tallentumista lapsilla sekä todennäköisesti myös verbaalista tietoa, jolla on matemaattisia vaikeuksia. Keskusyksikön puute rajoittaa numeerista ja visuaalista tietoa lapsilla, joilla on sekä matemaattisia että lukemiseen liittyviä

vaikeuksia. Työmuistin puute ei koske kaikkia komponentteja ainoastaan keskussyksikköä. (Andersson & Lyxell, 2007.) Kyttälän ym. (2010) mukaan matemaattisista vaikeuksista kärsivät olivat vertaisryhmää heikompia sekä verbaalissa että visuaalis-spatiaalisessa työmuistissa. On todennäköistä, että työmuistin heikot resurssit eli heikko kapasiteetti tallentaa ja käsitellä tietoa sekä heikko muuttuva älykkyys ja kielitaito rajoittaa kykyä menestyä perusmatematiikassa. Ryhmä, joka on vaarassa joutua tulevaisuudessa vaikeuksiin koulumatematiikassa, omaa heikkomman kognitiivisen pohjan aikaisissa matematiikan taidoissa esikouluiässä. (Kyttälä ym., 2010.)

Tiedonhaun nopeus muistista on nopeampi oppilailla, joilla on korkeampi työmuistin kapasiteetti (Barrouillet & Lépine, 2005). Oppilaat, joilla on korkea työmuistin kapasiteetti, ratkaisevat aritmeettisia ongelmia nopeammin strategioiden kautta, sillä suuri työmuistikapasiteetti helpottaa ongelmien säilyttämistä laskettaessa ja varmistaa tarkemmat vastaukset, ja näin helpottaa hakua. Hitaasti laskeva lapsi on alttiimpi unohtamaan ongelman tai osan siitä ennen vastauksen saantia, ja siten ei saa oikeaa vastausta ongelmaan. Käytetyn tiedonhaun voimakkuus väheni lapsilla lisättäessä ratkaistavaa ongelmaa, ja kyseinen vaikutus näkyi selvemmin alhaisen työmuistin kapasiteetin omaavilla lapsilla. Näin ollen vaikeudet lisääntyivät, sillä he hakevat pienemmällä voimakkuudella ja luottavat useammin varasuunnitelmastrategiaan. Kognitiivista kuormitusta lisää hitaan algoritmisen strategian käyttäminen. Lapset, joilla on alhaiset työmuistin resurssit, ovat hitaampia hakemaan vastauksia muistista, mikä voisi osittain johtua useammasta turvautumisesta algoritmisiin strategioihin. Korkean työmuistin omaavat oppilaat ovat vähemmän taipuvaisia käyttämään sormilla laskemista, käyttävät verbaalista laskemista ja siirtyvät aikaisemmin käyttämään myöhempää strategiatyyppiä. Aritmeettisten faktojen tiedonhaku muistista on taipuvainen häiriöille. Laajan työmuistin omaavat lapset vastustavat häiriötä ja hakevat oikeat vastaukset useammin. Matalan työmuistin omaavilla on vaikeuksia estää vääriä vastauksia. (Barrouillet & Lépine, 2005.)

Komorbiditeetti on useiden kognitiivisten häiriöiden samanaikainen esiintyminen, mikä on keskeinen piirre oppimisvaikeuksissa, ja komorbiditeetti voi johtua monien eri tekijöiden välisestä vuorovaikutuksesta (Lyytinen ym, 2000,45). Oppilailla, joilla on sekä matemaattinen vaikeus että lukemisen vaikeus, vaikeudet olivat vakavampia, sillä he suoriutuivat matalammilla pisteillä ongelmanratkaisussa kuin oppilaat, joilla oli ainoastaan matemaattinen vaikeus (Fuchs & Fuchs, 2002). Lerkkasen, Rasku-Puttosen, Aunolan ja Nurmen (2005) mukaan matematiikka ja luetun ymmärtäminen ovat yhteydessä toisiinsa peruskoulun ensimmäisellä ja toisella luokalla. Matemaattinen suorituskkyky ennusti luetun ymmärtämisen kehitystä alakoulun ensimmäisen vuoden aikana (Lerikkanen ym. (2005).

4 Matematiikkakuvan muodostuminen

Matematiikkakuvan muodostukseen vaikuttaa oppilaan saamat kokemukset matematiikasta (Hannula & Holm, 2018, 140; Huhtala & Laine, 2004, 326). Hannula ja Holm (2018, 133) määrittelevät matematiikkakuvan muodostuvan matematiikkaan liittyvistä uskomuksista, tunteista ja motivaatiosta. Kyseiset matematiikkakuvan osat voivat olla tiedostamattomia tai tiedostettuja, mutta suhteellisen pysyviä (Hannula & Holm, 2018, 133,149). Matematiikkakuvan eri osa-alueet vaikuttavat toisiinsa (Hannula & Holm, 2018, 149), ja matematiikkakuvan muodostuksen säätelymekanismina toimivat sen eri osat (Huhtala & Laine, 2004, 326). Huhtala ja Laine (2004, 326) määrittelevät matematiikan osa-alueiksi tiedon, käsitykset, uskomukset, asenteet ja tunteet. Käsittelen tässä kappaleessa matematiikkakuvan osa-alueista sekä Huhtala & Holmin että Huhtala & Laineen määritelmien mukaan.

4.1 Asenteet

Peruskoulun alkuvuosina matematiikkaa kohtaan oppilaiden asenteet ovat positiivisia (Tuohilampi & Hannula, 2013, 234). Vastoin perusopetussuunnitelman tavoitteita asenteet matematiikkaa kohtaan muuttuvat kielteisemmiksi, sillä pystyvyyden tunne sekä matematiikasta pitäminen laskevat. Ensin pitämisessä tapahtuu huononemista, ja sen jälkeen pystyvyyden tunteessa. Pitäminen laskee kolmannen luokan mittauksesta kuudennen luokan mittaukseen lähes 18 prosenttia, mutta tämän jälkeen lasku tapahtuu maltillisemmin kohti yhdeksännettä luokkaa, joten suurin pudotus tapahtuu alakoulun puolella. Puolestaan pystyvyyden tunne huononee huomattavasti yläasteaikana, sillä pystyvyyden tunteen keskiarvo heikkenee reilut kymmenen prosenttia kuudelta luokalta yhdeksänteen luokkaan. Matematiikan kokeminen hyödylliseksi laskee yhdeksännen luokan mittauksesta kuudennen luokan mittaukseen. Matematiikan kokemuksen hyödylliseksi ja pystyvyyden tunne laskevat samanaikaisesti ahdistuksen tunteen kasvaessa, ja tätä saattaa selittää selviytymisstrategioiden käyttö. Mikäli vaikeuden kohde asetetaan mielessä vähemmän tärkeäksi, omat vaikeudet on helpompi hyväksyä. (Tuohilampi & Hannula, 2013, 234-235.)

Kuudennen luokan kokonaisosaaminen selittää voimakkaimmin pystyvyyden tunnetta muista asennetekijöistä, kuten matematiikasta pitämistä, matematiikan hyödylliseksi kokemisesta ja matematiikan kokemista ahdistavaksi. Kuitenkaan asenteilla ja osaamisella ei ole vahvaa pitkittäistä vaikutusta toisiinsa, mikä voidaan nähdä positiivisen asiana. (Tuohilampi & Hannula, 2013, 235).

On todennäköistä (Tuohilampi & Hannula, 2013), että oppilaan epäonnistumisen kokemukset matematiikassa ovat asenteiden heikkenemisen taustalla. Oppilaan epäonnistuessa käsitys omasta kyvykkyydestä matematiikassa heikkenee. Tulevien epäonnistumisien pelko aiheuttaa lisääntyvää ahdistusta oppiainetta kohtaan (Tuohilampi & Hannula, 2013, 248).

Oppilaan asenne vaikuttaa oppilaan sinnikkyYTEEN matematiikan tehtävän tai uuden asian ollessa haastava. Sellainen oppilas, jolla on myönteinen minäkuva itsestään matematiikan oppijana, jaksaa ponnistella pidempään, ja näin voittaa haasteet (Hannula & Holm, 2018, 135).

McLeodin mukaan (1992) asenteet matematiikkaa kohtaan kehittyvät kahdella eri tavalla. Ensimmäisen mukaan asenteet voivat johtua toistuvan emotionaalisen reaktion automatisoitumisesta, ja toisen tavan mukaan vanhan asenteen siirtymisestä uuteen asenteeseen.

4.2 Uskomukset

Uskomukset ovat kognitiivisia luonteeltaan ja kehittyvät pitkän ajanjakson aikana (McLeod, 1992). Uskomuksiin itsestä matematiikan oppijana kuuluu minäpystyvyys, minäkuva ja itsetuottamus (McLeod, 1992; Hannula & Holm, 2018, 137). Vain osa uskomuksista tiedostetaan (Huhtala & Laine, 2004, 329). McLeodin (1992) mukaan matematiikkaan liittyvät uskomukset luokitellaan uskomuksen kohteen mukaan, ja täten oppilaalla on uskomuksia matematiikasta oppiaineena, itsestään matematiikan oppijana sekä matematiikan oppimisesta (Hannula & Holm, 2018, 136).

Uskomukset perustuvat yleensä omiin kokemuksiin, mutta uskomuksiin vaikuttavat oppilastovereiden, vanhempien ja opettajien puheet. Uskomukset matematiikan luonteesta liittyvät oppilaan uskomuksiin matematiikan oppimisesta. Matematiikan ajatteleva pelkinä ulkoa opeteltavina kaavoina tai matematiikan ajatteleva kehittyvänä tieteenä, jossa uusi tieto perustellaan aiemmin tunnetuista tosiasioista eksaktisti, ohjaavat eri tavalla ajattelevaan matematiikan oppimisesta. Omat oppimiskokemukset vaikuttavat myös oppimista koskeviin uskomuksiin. (Hannula & Holm, 2018, 136.)

Minäpystyvyys ja minäkuva

Minäpystyvyys on henkilökohtaisten omien kykyjen arviointia (Bandura, 1997, 11) ja yksilön uskomuksia siitä, mitä voi tai osaa tehdä (Schunk & Paajres, 2002, 17). Minäpystyvyysuskomukset ovat keskeisiä tekijöitä osaamisessa. Erilaiset henkilöt samanlaisilla taidoilla tai sama

henkilö eri olosuhteissa voivat suoriutua riittävästi, huonommin tai paremmin riippuen minäpystyvyyssuskomuksista (Bandura, 1997, 37).

Monet tekijät vaikuttavat minäpystyvyyteen (Schunk & Pajares, 2002, 17). Aikaisemmat akateemiset kokemukset ja niihin liittyvä palaute muodostavat perustan myöhemmälle uskomuksille kyvyistä, mikä ennustaa taas kiinnostusta (Viljaranta, Tolvanen, Aunola & Nurmi, 2014). Schunkin ja Pajaresin (2002, 17) mukaan omien kykyjen havainnointi vaikuttaa minäpystyvyyteen. Minäpystyvyyteen vaikuttaa myös sosiaalinen vertailu, uskomukset tulosten synnystä, tärkeyden havainnointi sekä käytettävissä oleva aika. Minäpystyvyyttä voi haavoittaa myös kykyryhmittely. Luokissa, joissa mahdollistuu sosiaalinen vertailu suuresti, alentuu sellaisten oppilaiden minäpystyvyys, joiden suorituskkyky on ikäistään heikompi. (Schunk & Pajares, 2002, 17, 20.) Koululuokat ovat vakiintuneita ulkoiselle vertailulle (Chiu, 2012). Ihmiset voivat arvioida minäpystyvyyttään tunnetilalla, jota kokevat tarkastellessaan toimintaa. Vahvat emotionaaliset reaktiot antavat vihjeitä ennakoivasta epäonnistumisesta tai menestyksestä. Tuntiessa negatiivisia ajatuksia ja pelkoa kyvyistä voivat kyseiset affektiiviset tunteet madaltaa minäpystyvyyttä ja saavat aikaan lisää stressiä ja levottomuutta, mikä lisää heikkouden tunnetta. (Schunk & Pajares, 2009, 37.)

Opiskelijan kokiessa suoriutuneensa hyvin tai tulevansa kyvykkäämmäksi minäpystyvyys paranee (Schunk & Pajares, 2002, 25). Schunkin (1995) mukaan hidas edistymisen tai menestyksen puute eivät välttämättä madalla motivaatiota tai minäpystyvyyttä, jos opiskelijat uskovat suorituksensa paremmin vaihtamalla lähestymistapaa, kuten käyttämällä tehokkaampia strategioita (ks. Schunk & Pajares, 2002, 25). Minäpystyvyys voi vaikuttaa lopulliseen saavutukseen, ja näin saavutetaan se, mitä uskoo saavutettavan (Schunk & Pajares, 2002, 39). Se, mitä ihminen uskoo osaavansa toimii ennustajana siihen, mitä osaa oikeastaan tehdä sekä vaikuttaa koettuun tunteeseen tehtävän teon hetkellä (Pajares & Miller, 1994).

Minäpystyvyys selittää positiivisesti suoritusta matematiikassa (Tuominen-Soini, Salmela-Aro & Niemivirta, 2015). Tuohilammen ja Hannulan (2013) mukaan pystyvyyden tunteella on korkea korrelaatio suoritustason kanssa. Minäpystyvyys (Schunk & Pajares, 2002, 16) on tärkeä saavutusta määrittelevä tekijä, mutta se ei ole yksin sen vaikuttaja. Minäpystyvyyden määrä ei tule edistämään suorituskkykyä vaadittavien kykyjen ja tietämyksen ollessa puutteellisia. Uskomukset toiminnan ennakoiduista saavutuksista ja tulosodotukset ovat tärkeitä, sillä opiskelijat eivät sitoudu toimintaan, jonka he uskovat johtavan negatiiviseen toimintaan. (Schunk & Pajares, 2002, 16).

Ihmiset, jotka epäilevät kykyjään tietyllä alueella, jättäytyvät pois vaikeista tehtävistä. He hidastelevat tehtävien ponnisteluissaan, heillä on vaikeutta motivoida itseään ja he luovuttavat nopeasti esteiden ilmentyessä. Samoin heillä on heikko sitoutuminen tavoitteisiin. Henkilökohtaiset puutteet ja epäonnistumisen haitalliset seuraukset heikentävät heidän pyrkimyksiään ja analyyttistä ajattelua siten, että siirtävät huomion henkilökohtaisiin puutteisiin ja mahdollisiin epäonnistumisiin. He ovat hitaita palauttamaan tehokkuutensa epäonnistumisen jälkeen, ja ovat alttiita diagnosoimaan riittämättömän suorituskyvyn puutteellisenä kyvykkyytenä, ja sen johdosta helposti kokevat stressiä (Bandura, 1997, 39.) Ei ole toivottavaa, että opiskelija aliarvioi osaamistaan. Luottamuksen puute omaan osaamiseen tai sitoutumattomuus tehtävään aiheuttaa sen, että vaikeuden tehdään vähemmän töitä tehtävän eteen. (Pajares & Miller, 1994.)

Ihmiset, joilla on vahvat uskomukset kyvyistään, lähestyvät vaikeita tehtäviä enemmän haasteina kuin vältettävinä uhkina. Myönteinen suuntautuminen edistää kiinnostusta ja osallistumista niin, että asettavat itselle haastavia tavoitteita sitoutumisen ylläpitämiseksi. He investoivat suurta vaivaa siihen, että selviävät takaiskuja vastaan. He nopeasti palauttavat tehokkuuden epäonnistumisen jälkeen. He lähestyvät potentiaalisia stressitekijöitä luottamalla siihen, että he voivat hallita niitä, mikä parantaa suorituskyyä. (Bandura, 1997, 39.) Schunkin ja Pajares (2009, 36) mukaan enemmän pystyvyyttä kokevat opiskelijat omaksuvat enemmän itsesääätelyä, kuten tavoitteiden asettelua ja tehokkaampien opiskelustrategioiden käyttöä.

Yksilön suorien kokemusten ja muiden antamien arviointien kautta oletetaan muodostuvan minäkuva (Bandura, 1997, 10). Minäkuva käsittää yksilön osaamista tietyllä alueella tai yleisesti, ja sisältää myös tunteet, joissa on mukana osaamisen uskomukset (Schunk & Pajares, 2002, 17). Naisopiskeilijoiden heikompi suorituskyy ja matalampi minäkuva johtuivat suurilta osin kyvykkyyden matalammasta arvioinnista (Pajares & Miller, 1994). Miehillä oli korkeampi suorituskyy, minäkuva ja minäpystyvyys, mutta erot johtuivat suurilta osin minäpystyvyyden vaikutuksesta (Pajares & Miller, 1994). Akateeminen minäkuva voi alentua lahjakkaissa luokissa. (Areepattamannil, Swe Khine & Al Nuaimi, 2017).

Ongelman ratkaisua matematiikassa ennusti matemaattinen minäpystyvyys paremmin kuin minäkuva (Pajares & Miller, 1994). Viljarannan ym. (2014) mukaan akateeminen suorituskyy ennustaa myöhempää kiinnostusta minäkuvan kautta. Paremmin matematiikassa menestyvillä oppilailla oli positiivisempi minäkuva, mikä ennusti myöhempää kiinnostusta matematiikkaa kohtaan (Viljaranta ym., 2014). Tutkimuksessa ei löytynyt todistetta, että minäkuva tai kiinnos-

tus ennustaisi myöhempää suorituskyykyä (Viljaranta ym., 2014). Sosiaalisella vertaillulla muiden oppilaiden kanssa saattaa olla vaikutusta siihen, kuinka opiskelijoiden suorituskyyky edistää heidän minäkuvaansa (Viljaranta ym., 2014).

Jungertin ja Andersonin tutkimuksen (2013) mukaan matematiikan oppimisvaikeuden omaavilla lapsilla on alhaiset akateemiset minäpystyvyyssuomukset matematiikassa, mutta ei muissa oppiaineissa. Oppilaat, joilla ei ollut oppimisvaikeutta tai oppimisvaikeuksia, oli huomattavasti korkeampi minäpystyvyys matematiikassa (Jungert & Andersson, 2013). Holopaisen, Taipaleen ja Savolaisen (2017) tutkimuksessa oppilailla, joilla oli matemaattisia vaikeuksia, oli matalin akateeminen minäkäsitys verrattuna muihin tutkimuksessa olleisiin ryhmiin.

Minäpystyvyyden on todettu ennustavan voimakkaasti suoritustasoa, sillä osaavat oppilaat arvioivat osaamistaan myönteisemmin. Myös tehtäväsuoritukseen myönteisempi arvio antaa lisää arvoa. (Tuominen-Soini, Salmela-Aro & Niemivirta, 2015, 174.) Opiskelijoiden uskomukset omista kyvyistään pitää nähdä tärkeinä välittäjinä sekä ennustajana suoritukseen, ja minäpystyvyyssuomuksia pitää muuttaa niiden ollessa heikentäviä ja epätarkkoja (Pajares & Miller, 1994). Linnanmäen (2004, 243) mukaan myönteinen minäkäsitys on positiivisesti yhteydessä hyviin koulusaavutuksiin, ja puolestaan kielteisellä minäkäsityksellä on yhteyttä kielteisiin asenteisiin koulua kohtaan.

Opiskelijat, joilla on alhainen pystyvyys hallita akateemisia vaatimuksia, ovat taipuvaisia ahdistukselle (Bandura, 1997; Schunk & Pajares, 2009, 38). Heikon minäpystyvyyden omaavat ihmiset ajattelevat tehtävien olevan todellista vaikeampi, mikä puolestaan edistää stressiä, ahdistusta ja masennusta (Schunk & Pajares, 2009, 38). Pajaresin ja Kranzlerin (1995) mukaan kyvyn ja kokemuksen matematiikasta välittää minäpystyvyys sekä ahdistuksen että suorituskyykyn tasoon. Oppilaiden matematiikka-ahdistus on yhteydessä ongelmanratkaisun suorituskyykyssä, kuitenkin ahdistukseen vaikuttaa minäpystyvyyden ei-kausalisesta yhteydestä. Minäpystyvyydellä on suora vaikutus ahdistukseen, jolla on heikko suora vaikutus suorituskyykyyn. (Pajares & Kranzler, 1995.) Korkea akateeminen minäpystyvyyden taso on yhteydessä matalaan koeahdistuksen tasoon (Nie ym., 2013). Vahvempaa minäpystyvyyttä kokevilla oppilailla oli vähempää matematiikka-ahdistusta (Betz & Hackett, 1983).

4.3 Tunteet

Hannulan ja Holmin (2018, 137) mukaan oppilaan suhde matematiikkaan, matematiikan opetukseen ja oppimiseen on tunnepohjainen. Oppilaan kokemat tunteet voivat joko heikentää tai

vahvistaa oppilaan uskomuksia (Hannula & Holm, 2018, 138). Oppimisessa on keskeistä tavoitteiden asettelu, ja tunteet ovat koko ajan läsnä tavoitteiden asettelussa. Tunteet vaikuttavat motivaation, keskittymiseen sekä opiskelustrategioiden käyttöön. (Pekrun & Stephens, 2010.)

Saavutustunteet määritellään tunteiksi, jotka ovat suoraan yhteydessä saavutustoimintaan, kuten opiskeluun tai saavutustulokseen eli epäonnistumiseen tai onnistumiseen (Pekrun, 2006; Pekrun & Stephens, 2010). Saavutustunteita ovat toimintaan liittyvät tunteet ja tulokseen liittyvät tunteet (Pekrun, 2016, 123). Pekrunin (2006) kontrolli-arvoteoriassa määritellään eri arviointitapauksissa kuuluvan mahdolliset tulostunteet, takautuvat tulostunteet ja toimintaan liittyvät tunteet. Pekrunin ja Stephensin (2010) toivat esille, että toiminnan suoritukseen liittyvät tunteet ovat myös tärkeitä saavuttamiselle, ja täten toiminnan suoritukseen liittyviä tunteita on pidettävä myös saavutustunteina. Toimintaan liittyviä tunteita ovat opiskelun aikana oleva nautinto, ikävystyminen (Pekrun, 2016, 123), innostus aloittaa uutta tehtävää ja viha tehtävän ollessa kohtuuttoman vaikea (Pekrun & Stephens, 2010). Toimintaan liittyvät tunteet eivät huomioi tulosta, vaan toimintaa (Pekrun, 2006). Tulostunteisiin sisältyy sekä tulevat tunteet, kuten toivo ja ahdistus, että menneet tunteet jo tapahtuneeseen menestykseen tai epäonnistumiseen, kuten ylpeys, häpeä, pettymys tai helpotus (Pekrun, 2016, 123). Takautuvat tulostunteet syntyvät menestymisen tai epäonnistumisen tapahtuessa (Pekrun, 2006).

Kontrolli-arvoteoriassa saavutuksen tunteille on keskeistä kontrollin ja arvon merkitys (Pekrun, 2006), sillä erilaiset arvioinnit kontrollista ja arvosta käynnistävät erilaiset saavutuksen tunteet (Pekrun & Stephens, 2010). Tämä tarkoittaa itsensä kontrollia saavutustoimintaan ja saavutustoiminnan tuloksiin sekä saavutustoiminnan tuloksen arvoon, esimerkiksi mieltääkö menestyksen itselle tärkeäksi (Pekrun, 2006). Kontrolliarviointiin kuuluu saavutuksiin liittyvien toimintojen ja tulosten havainnointi, minäpystyvyydenuskomukset, tulosten odotukset ja osaamisen arviointi. Arvoarvioinnit liittyvät saavutustoimintaan ja tulosten subjektiiviseen arvoon, kuten haluaako saavuttaa menestystä vai välttää epäonnistumista. Opiskelijat kokevat monenlaisia tunteita riippuen siitä kokevatko kontrollia vai kontrollin puutetta niistä tuloksista tai toimintoista, jotka ovat heille subjektiivisesti tärkeitä. (Pekrun, 2016, 132-133.)

Opiskelijat ovat todennäköisemmin huolissaan matematiikassa sen ollessa heille subjektiivisesti tärkeää, mutta vaikutus on heikompi, kun opiskelijan koettu kyvykkyys ja odotettu menestys matematiikassa on suhteellisen korkeaa (Lauermann ym., 2017). Opiskelijan ollessa varma menestyksestä hänen ei pitäisi tuntea ahdistusta. Opiskelija kokee nautintoa uskoessaan onnistuvansa omatessaan korkean kontrollin sekä kokiessaan työn itselleen tärkeäksi. Huolen

tunnetta koetaan kokiessa työ tärkeäksi ja uskoessa epäonnistuvan eli kokiessa kontrollin puuttetta. (Pekrun, 2016, 133.) Mahdolliset tulostunteet ovat ratkaisevia keskittymiskontrollissa riippuen, onko menestys saavutettavissa tai epäonnistuminen vältettävissä (Pekrun, 2006).

taulukko 1. Pekrunin & Stephensin (2010) mukainen taulukko saavutustunteiden luokittelusta

	positiivinen		negatiivinen	
	aktivoiva	deaktivoiva	aktivoiva	deaktivoiva
toiminta	nautinto	rentoutunut	viha	ikäväystynyt
tuleva tulos	toivo	helpotus	ahdistus	toivottomuus
mennyt tulos	ylpeys	tyytyväisyys	häpeä	pettymys

Saavutustunteet voidaan ryhmitellä arvon ja toiminan suhteen sekä aktiiviset tunteet voidaan erottaa deaktivoivista tunteista (Pekrun & Stephens, 2010). Kontrollin ja arvon kokeminen on välttämättömiä positiivisten saavutustunteiden käynnistämiseksi, ja kontrollin ja riittävän arvon puuttuminen ovat välttämättömiä negatiivisten saavutustunteiden käyttämiseksi. Aktiiviset tunteet ovat riippuvaisia positiivisen osaamisen arvioinnista ja toiminnan arvosta. Viha ja turhautuminen syntyvät toiminnan kustannusten ollessa negatiivisia, kuten ongelman eteen pitää nähdä liikaa vaivaa, ja puolestaan ikävystymistä koetaan, koska toiminnan kannustimet puuttuvat. (Pekrun, 2016, 133.)

Positiiviset aktivoivat tunteet, kuten nauttiminen oppimisesta, vaikuttavat positiivisesti, ja kielteiset deaktivoivat tunteet, kuten ikävystyminen ja toivottomuus, vaikuttavat kielteisesti. Positiiviset aktivoivat tunteet vahvistavat motivaatiota ja lisäävät kiinnostusta, ja negatiiviset deaktivoivat tunteet heikentävät motivaatiota. Puolestaan negatiiviset aktivoivat tunteet, kuten viha, häpeä tai ahdistus, ja positiiviset deaktiiviset tunteet, kuten helpotus, vaikuttavat motivaatioon monimutkaisesti. Opiskelijan kohdatessa ahdistusta epäonnistumisen suhteen, voi ahdistus joko vähentää motivaatiota tai vahvistaa motivaatiota opiskelijan yrittäessä välttää epäonnistumista. Positiiviset aktivoivat tunteet tukevat joustavien strategioiden käyttöä, ja negatiiviset aktivoivat tunteet taas jäykempiä strategioita. Positiiviset aktivoivat tunteet, kuten nautinto, lisäävät itsesäätelyä, ja negatiiviset tunteet kuten häpeä tai ahdistus laittavat opiskelijat riippuvaiseksi ulkoisesta tuesta. (Pekrun, 2016, 135-136.)

Pettymys tai helpotus riippuvat odotusten ja todellisen tuloksen ristiriidasta. Pettymys syntyy, kun ennakoitu menestys ei tapahdu, ja helpotus syntyy, kun odotettu epäonnistuminen ei tapahdu. (Pekrun & Stephens, 2010.) Pekrunin mukaan (2016, 133) ennakoiva ilo syntyy kokiessa korkeaa kontrollia, ja puolestaan toivottomuutta koetaan kokiessa kontrollin puutetta. Kun kontrollissa on epävarmuutta ja kun keskiössä on odotetun menetyksen positiiviset arvo, koetaan toivoa. Ahdistusta koetaan kokiessa odotettua epäonnistumista ja negatiivista arvoa. Välittömästi havaitun menestyksen tai epäonnistumisen jälkeen koetaan iloa tai surua. Aiempien odotusten ja todellisen lopputuloksen välinen vastaavuus on yhteydessä pettymykseen ja helpotukseen. Menestys tai epäonnistus synnyttää ylpeyttä, häpeää, kiitollisuutta ja vihaa. (Pekrun, 2016, 133.)

Vähemmän (Lauermann ym., 2017) huolia matematiikan suorituksesta on oppilailla, jotka kokevat korkeaa kyvykkyyttä, mutta tämä yhteys riippuu subjektiivisesti annetuista merkityksestä eli arvoarvioinnista. Subjektiivisesti arvokkaaksi suorituksen kokevat oppilaat todennäköisesti huolestuvat suorituksesta, mutta tämä on kuitenkin riippuvainen subjektiivisistä kyvyistä. Opiskelijat ovat todennäköisemmin huolissaan suorituksessaan raportoidessaan korkeat subjektiiviset arvot matematiikassa ja suhteellisen matala osaaminen ja odotettu akateeminen menestys. (Lauermann ym., 2017.)

Matematiikka-ahdistus

Matematiikka-ahdistus on jännittyneisyyden, huolen tai pelon tunne, joka häiritsee matematiikassa suoriutumista (Ashcraft, 2002), ja ahdistuksen aikaansaama pelkotila matematiikkaa kohtaan vaikuttaa opiskelijan hyvinvointiin (Kyttälä & Björn, 2010). Ahdistunut opiskelija kokee pelkoa emotionaalisenä tilana kohdatessa matematiikan tehtävän. Puolestaan opiskelijalla on taipumusta kokea pelkoa emotionaalisenä ominaisuutena. (Hannula, 2012.) Matematiikka-ahdistus on kielteinen tunnepohjainen reaktio, jonka voimakkuusaste voi vaihdella. Matematiikka-ahdistus ilmenee tilanteissa, joissa kohdataan lukuja, vaaditaan matemaattista ongelmanratkaisua tai esiintyy muuta matemaattista sisältöä. (Mononen ym., 2017.) Matematiikka-ahdistus voi lamaannuttaa oppilaan tilanteessa, jossa oppilaan pitää kohdata matematiikkaa (Hannula & Holm, 2018).

Matematiikka-ahdistuksella on negatiivisia vaikutuksia oppilaiden matematiikan saavutuksiin jo ensimmäisellä ja toisella luokalla (Ramirez, Gunderson, Levine & Beilock, 2012). Matematiikkaan liittyvä ahdistus lisääntyy kymmenen prosenttia tultaessa kuudennelta yhdeksännelle luokalle, ja tämä tapahtuu samanaikaisesti pystyvyyden tunteen heikkenemisen kanssa (Tuohi-

lampi & Hannula, 2013, 235). Matematiikka-ahdistus lisääntyi heikoilla oppijoilla, jotka opiskelivat yleisopetuksen opetussuunnitelman mukaan (Räsänen & Närhi, 2013, 211). Puolestaan matematiikka-ahdistuksessa ilmeni pientä vähenemistä oppilailla, joilla matematiikka oli yksilöllistetty (Räsänen & Närhi, 2013, 211).

Oppilaan minäpystyvyydenuskomukset heidän matematiikan kyvykkyydestä vaikuttivat suoraan matematiikka-ahdistukseen ja suorituskyykyyn matemaattisessa ongelmanratkaisussa, kun yleistä kyvykkyyttä ei otettu huomioon (Pajares & Kranzler, 1995). Uupumus ja suoritusta välttämisen-orientaatio selittivät ahdistuneisuutta. Saavutus-orientaatiolla ja ahdistuneisuudella oli negatiivinen yhteys. (Tuominen-Soini yms., 2015, 172.) Korkeasti matematiikka-ahdistuneet yksilöt (Ashcraft, 2002) välttävät matematiikkaa ja omaksuvat negatiivisia asenteita matematiikkaa kohtaan sekä heillä negatiivisia minäkäsityksiä matematiikkakyvyistään.

Matematiikka-ahdistus vaikuttaa kognitiivisiin prosesseihin, kuten työmuistin resursseihin eli matematiikka-ahdistus häiritsee työmuistin resursseja (Ashcraft, 2002). Ahdistuneet yksilöt keskittävät huomion huoliin enemmän kuin tehtävään, ja näin ahdistus häiritsee työmuistia (Eysenck & Calvo, 1992). Negatiivinen suhde matematiikka-ahdistuksella ja matematiikan saavuttamisella on myös niillä lapsilla, joilla on korkea työmuisti. He ovat alttiita matematiikka-ahdistuksen tuhoisille vaikutuksille. (Ramirez ym., 2012.) Lapset (Barrouillet & Lepine, 2005) joilla on korkea työmuistin kapasiteetti, saavat vastauksen nopeammin kuin lapset, joilla on matala työmuistin kapasiteetti. Aritmeettisen faktan tiedonhaku muistista on prosessina altis häiriölle. Mahdollisesti lapsilla, joilla on korkea työmuistikapasiteetti, on suurempi kyky vastustaa häiriötä, ja sen vuoksi he hakevat vastaukset nopeammin muistista. On vaikeampaa lapsille, joilla on matalampi työmuistikapasiteetti, estää vääriä vastauksien hakemista. (Barrouillet & Lepine, 2005.)

Ashcraftin & Ridleyyn (2005, 319) mukaan matematiikka-ahdistuksella ja matematiikka-asenteilla on kaksoisvaikutus, mikä tekee matematiikan ja saavutuksen yhteydestä monimutkaisen. Matematiikka-ahdistus ja asenteet matematiikkaa kohtaan voivat yhdessä vaikuttaa siihen, mitä oppilas oppii matematiikan tunnilla, sillä ne vaikuttavat motivaatioon ja huomioon. Korkeasti matematiikka-ahdistusta kokevat yksilöt kokevat todennäköisesti oppitunnin aikana ahdistuksen negatiivisia vaikutuksia. Vaikka matematiikka-ahdistusta kokevat yrittäisivät, heidän ahdistusreaktionsa voi ottaa vallan. Täten ahdistusreaktiot voivat johtua matematiikan hallinnan puutteesta. Matematiikka-ahdistusta kokevien saavutusta arvioidessa he ovat ahdistuksen vaikutuksen alaisina. Tutkijat sanovat, että ahdistuksen ja saavutuksen välillä olevan yhteys tar-

kasteltaessa ahdistuneiden oppilaiden alhaisia saavutuksia, ja se jättää huomioimatta todennäköisyyden siitä, että saavutukset tulokset ovat todellisuutta pienempi. Matematiikka-ahdistusta kokeva yksilö suorittaa matematiikkatestejä osittain emotionaalisen reaktion vuoksi. Monesti jätetään huomiotta, että saadut tulokset ovat todellista alempia testauksen aikana matematiikka-ahdistuksen vuoksi. (Ashcraft & Ridley, 2005, 319-320.)

Ahdistuneisuus liittyy huonoon käsittelytehokkuuteen koeolosuhteissa, sillä suurta ahdistusta kokevat yksilöt käyttävät enemmän käsittelyresursseja kuin vähemmän ahdistuneet yksilöt. Ahdistuksen vaikutukset suorituskyvyn tehokkuuteen riippuvat lisäresurssien saannista käytöstä sekä tehtävien vaatimuksista työmuistista. (Eysenck & Calvo, 1992.) Epäonnistumisen odotus eli matematiikasta matalan tuloksen odottaminen on yhteydessä korkeampaan matematiikka-ahdistuksen tasoon. Tuloksen kokema arvo on positiivisessa yhteydessä ahdistuksen kanssa eli mitä korkeampi menestyksen tärkeys on, sitä korkeampi on ahdistuksen taso. (Kyttälä & Björn, 2010.) Tuohilammen ja Hannulan mukaan (2013, 235) saattaa ahdistuksen tunne oppiainetta kohtaan kasvavan oppilaan kokiessa vaikeuden tunnetta matematiikkaa kohtaan.

Man ja Xun (2004) mukaan matalat saavutukset matematiikassa aiheuttavat myöhempää matematiikka-ahdistusta. Kyttälän ja Björnin mukaan (2010) aiempi matala saavutus matematiikassa ennusti myöhempää matematiikka-ahdistusta, mutta vaikutus oli epäsuora, sillä yhteys aiemman suorituksen ja ahdistuksen välillä välittyi tulosodotusten kautta (Kyttälä & Björn, 2010). Aiempi saavutus matematiikassa ennusti voimakkaimmin myöhempää saavutusta matematiikassa sekä tulosodotukset ja tulosarvot ennustivat myöhempää saavutusta matematiikassa (Kyttälä & Björn, 2010). Puolestaan matematiikka-ahdistus ei ennusta myöhempää suoritusta matematiikassa (Ma & Xu, 2004; Kyttälä & Björn, 2010). Tuominen-Soini ym. (2015, 172) toteavat ahdistuksen vaikuttavan negatiivisesti suoritukseen matematiikassa.

4.4 Motivaatio

Matemaattisten taitojen kehitykseen on yhteydessä oppimismotivaatio (Aunola & Nurmi, 2018, 61). Opiskelijoiden motivaatiotaipumus vaikuttaa oppilaiden käsityksiin ja mieltymyksiin opiskeluympäristössä (Tapola & Niemivirta, 2008). Hannulan ja Holmin (2018, 139) mukaan oppilaan motivaation kuuluu se, mitä oppilas pitää tärkeänä, mitä hän haluaa ja minkälaisia valintoja hän tekee. Hannula (2006) käsittelee motivaatiota taipumuksena tehdä tiettyjä asioita ja välttää tiettyjen asioiden tekemistä. Aunolan & Nurmen (2018, 61) mukaan oppimismotivaatio käsittää suhtautumistavan oppimistilanteeseen, kuten tehtäväsuuntautuneisen ja tehtävää välttelevän työskentelytavan sekä oppiaineeseen kuten matematiikkaan liittyvää kiinnostusta tai

ahdistuneisuutta. Korkea kiinnostus on yhteydessä hyviin matematiikan taitoihin, ja hyvät matematiikan taidot lisäävät kiinnostusta (Fisher ym., 2012).

Ryan ja Deci (2000) jakavat motivaation sisäiseen ja ulkoiseen motivaatioon. Yksilön motivoituessa tekemään tiettyä toimintaa, koska pitää toimintaa kiinnostavana tai se tuottaa mielihyvää, yksilö kokee sisäistä motivaatiota. Motivaation ollessa ulkoista yksilö on motivoitunut tekemään asioita tilanteen tai muiden ihmisten asettamien vaatimusten mukaisesti. Mikäli tavoitteeseen pyritään syyllisyyden tai ahdistuksen tunteen välttämiseksi, puhutaan ulkoisesta motivaatiosta. (Vasalampi, 2017, 55-56.)

Eri ikäisillä oppilailla on tunnistettavissa samoja tavoiteorientaatioprofiileja, joita ovat esimerkiksi oppimis-, suoritus- ja välttämishakuiset orientaatiot. Eri opiskeluorientaation omaavat oppilaat eroavat toisistaan oppimistulosten sekä oppimiseen liittyvän hyvinvoinnin suhteen. Oppimishakuinen oppilas etenee oma-aloitteisesti ja iteohjautuvasti kohdatessaan sopivasta haasteellisia tehtäviä. Samassa tilanteessa välttämishakuinen oppilas tarvitsee tukea ja opastusta pystyvyyden ja onnistumisen tunteen saavuttamiseen. (Tuominen, Pulkka, Tapola & Niemivirta, 2017, 92.) Opiskeluinto ja oppimisorientaatio ennustivat myönteisesti kiinnostusta, ja puolestaan välttämisorientaatio ja uupumus ennustivat negatiivisesti kiinnostusta (Tuominen-Soini ym., 2015, 172).

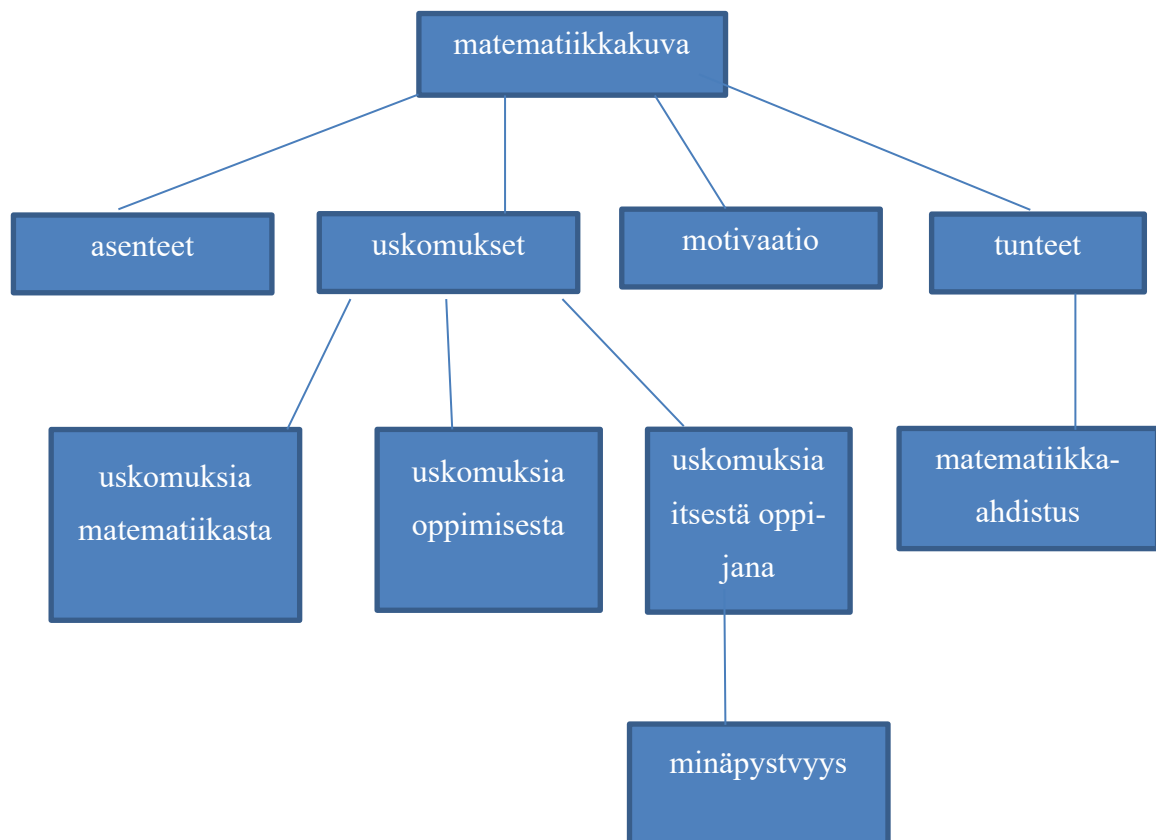
Opiskelijan kokiessa suoriutuneensa hyvin hänen motivaationsa paranee (Schunk & Pajares, 2002, 25), mutta menestyksen puute ei välttämättä madalla motivaatiota (Schunk, 1995). Tarpeeksi vaativat haasteet motivoivat oppilaita tehtävien tekoon, sillä liian haastava tehtävä uuvuttaa ja liian helppo tylsistyttää (Salmela-Aro, 2018, 39).

4.5 Miniteoriat

Oppilaan käyttämää vääränlaista strategiaa kutustaan miniteoriaksi (Laine ym., 2018, 70). Huhtalan ja Laineen (2004, 333) mukaan miniteorioiden uskotaan olevan yksi syy, jonka vuoksi oppilaat kokevat matematiikan epämiellyttäväksi ja vaikeaksi. Sanallisessa tehtävässä laskujärjestyksen ja laskutoimituksen päättämistä ohjaavat miniteoriat. Lisäksi desimaalilukuihin liittyy miniteorioita, koska ne ovat kokonaislukuja abstraktimpeja. Kokonaislukuihin liittyviä ajatusmalleja siirretään koskemaan desimaalilukuja. Esimerkiksi saatetaan luulla luvun 3,124 olevan lukua 3,8 suurempi, koska edellisessä luvussa on enemmän desimaalilukuja jälkimmäiseen verrattuna. (Huhtala & Laine, 2004, 327, 329.)

Taulukko 2. Matematiikkakuvan osa-alueet. (Mukaellen Hannula & Holm, 2018; Huhtala & Laine, 2004, 132)

Taulukossa on esitetty matematiikkakuvan osa-alueet. Matematiikkakuva koostuu asenteista, uskomuksista ja motivaatiosta matematiikkaa kohtaan sekä tunnesuhteesta matematiikkaan. Uskomukset matematiikasta jakautuvat uskomuksiin matematiikasta tieteenä, uskomuksia oppimisesta ja uskomuksia itsestä oppijana, johon kuuluu minäpystvyys. Tunteista matematiikkaa kohtaan kuuluu esimerkiksi matematiikka-ahdistus.



5 Matematiikkakuvan tukeminen

Myönteistä matematiikkakuvaa ylläpitävät luokan myönteinen oppimisilmapiiri, onnistumisen kokemukset, kannustus ja tuki (Hannula & Holm, 2018, 149). Opettajan on hyvä ymmärtää oppilaan suhtautumista matematiikkaan laajasti, jotta opettaja pystyy tukemaan oppimista (Hannula & Holm, 2018, 133). Tuohilampi (2017, 72) nostaa esille opettajan ammatillisen hienotunteisuuden tärkeyden. Tuohilampi & Hannula (2013) pohtivat, kiinnitetäänkö tarpeeksi huomiota oppilaan oppimiseen liittyvään autonomian kehittämiseen, oppimisen ilon saavuttamiseen, luovuuteen ja aktiivisuuteen. Heidän mukaan matematiikan oppimista tulisi kehittää innostavammaksi. Jokaiselle oppilaalle tulisi antaa matematiikan tunnilla onnistumisen elämyksiä (Linnamäki, 2004, 253). Oppimisympäristössä on otettava huomioon oppilaiden huolet, odotus- ja arvouskomukset, ja näin luoda emotionaalisesti ja motivationaalisesti tukevia oppimisympäristöjä (Lauermann ym., 2017). Vauraksen ym. (2018, 86) mukaan tarvitaan sujuvaa yhteistyötä luokanopettajan, erityisopettajan sekä moniammatillisen tiimin kanssa.

Matematiikan opiskelussa oppilas voi tuntea tarvetta pätevyyteen tavoitteena ratkaista tehtävä tai ymmärtää tunnin aihetta (Hannula, 2006). Opettajakeskeisessä matematiikan opetuksessa, missä noudatetaan sääntöjä ja rutiineja, on vain vähän tilaa oppilaiden autonomialle tai sosiaaliselle kuulumiselle matematiikan oppimisen yhteydessä. Puolestaan enemmän oppilaskeskeisessä luokassa, jossa on paljon tiimityötä ja merkitystä tekemisellä, voi olla monia mahdollisuuksia vastata autonomian ja vuorovaikutuksen kehittymisen tarpeisiin. (Hannula, 2006.) Matematiikan tulisi muodostua lapsille keinoksi ja välineeksi jäsentää oma todellisuutta ulkokohtaisten numeroiden laskemisen sijaan, ja matematisointi määritellään huomion kiinnittämiseksi arjen tilanteiden ja ilmiöiden matemaattisiin piirteisiin (Aunio ym., 2004, 218). Erilaisten matemaattisten ongelmien ja ratkaisujen pohtiminen kehittävät taitoa ilmaista ajatuksia johdonmukaisesti ja selkeästi (Ikäheimo & Risku, 2004, 239).

Ymmärtävä oppiminen on keskeistä alakoulumatematiikassa, sillä negatiivisen asenteen kehittyminen, ja sen tuomat työrauhaongelmat voivat juontaa laskutaidon liiallisesta korostamisesta ymmärryksen sijaan (Tuohilampi & Hannula, 2013). Ramirez ym. (2012) mukaan aikainen matematiikka-ahdistuksen tunnistaminen ja käsittely ovat tärkeitä, koska varhain alkaneet matematiikka-ahdistukset kasvavat räjähdysmäisesti. Matematiikka-ahdistuksen ja matematiikan suorituskyvyn suhdetta voidaan vähentää tekemällä oppilaat tietoisimmiksi vaihtoehtoista ongelmaratkaisutekniikoista, ja siten voidaan helpottaa matematiikka-ahdistuksen vaikutusta työmuistiin (Ramirez ym., 2012).

Opetuksessa olisi tärkeää motivationaalisten taipumusten tunnistaminen ja huomioon ottaminen (Tuominen ym., 2017, 92). Turnerin ym. (2002) mukaan matalampaa välttämistästrategioiden käyttöä esiintyi luokassa, jossa opettajat edistivät ohjausta ja tukivat oppilaiden motivointia oppimisessa. Opettajat auttoivat oppilaita rakentamaan ymmärrystä ja antoivat oppilaille tilaisuuden demonstroida heidän osaamistaan. Puolestaan opiskelijoilla oli korkeampaa välttämistästrategiaa luokissa, joissa sekä opettaja ainoastaan vähän huomioi oppilaiden ymmärtämisen rakentamista että oppilaiden motivaation tukemaninen oli matalaa. (Turner ym., 2002.) Kärsivällisyyttä, johdonmukaisuutta ja osaamista tarvitaan ohjatessa motivationaalisesti haavoittunutta oppilasta kohti kestävämpää motivaatiota (Vauras ym, 2018, 97). Lapsi, jolla on oppimisen vaikeuksia, tarvitsee merkityksen löytämistä ja motivointia (Tuohilampi, 2017, 72).

Minäpystyvyyden nostaminen kehittää emotionaalista ja fyysistä hyvinvointia sekä vähentää negatiivisia tunnetiloja. Nostettu minäpystyvyys voi vaikuttaa fysiologiseen tilaan ihmisellä ollessa kykyjä muuttaa ajatuksiaan. (Schunk & Pajares, 2009, 37). Olisi syytä toteuttaa interventioita, mikäli minäpystyvyyden arvioinnit ja epätarkat käsitykset tunnistetaan (Pajares & Miller, 1994). On erityisen tärkeää tunnustaa ja muuttaa virheellisiä arviointeja omasta osaamisesta (Pajares & Kranzler, 1995). Pystyvyyden opettamisessa oppilaille on olennaista, kuinka omaa oppimista säädellään (Bandura, 1997, 223).

Keskeistä on, miten virheisiin suhtaudutaan oppimistilanteissa. Mikäli oppimistilanteessa halutaan tukea oppimishalukkuutta, virheet tulisi nähdä oppimisen luonnollisena osana sekä syventävän ymmärryksen edistäjänä. (Mononen ym., 2017,101.) Tuohilampi (2017, 102-103) tuo esille, että virheelliset vastaukset tulisi säästää käsiteltäviksi eikä pyyhkiä pois, sillä niitä on vaikeampi muuttaa niiden ollessa pyyhityt. Laine ym., (2018, 84) tuovat esille, että oppilaiden jakolaskun oppimisen varmistamiseksi olisi syytä käsitellä opetuksessa oppilaiden tyypillisesti tekemiä virheitä, jotta oppilaat oppisivat tiedostamaan ne.

Ensimmäiseltä luokalta asti on syytä kiinnittää huomiota lasten matemaattisen taitojen kehityksen, matematiikan kumulatiivisen luonteen vuoksi (Aunola & Nurmi, 2018, 64). Jokaiselle oppilaalle todellinen inklusioperiaatteen mukainen ryhmä olisi sellainen, joka tarjoaisi kaikille tasosta riippumatta innostavaa ja monipuolista matematiikan opetusta (Tuohilampi, 2017, 72). Björnin, Aron ja Koposen (2018, 184) mukaan jokainen lapsi oppii matemaattisia taitoja opetuksen ja oppimisen asetettujen tavoitteiden ollessa sopivia sekä tuen ollessa riittäviä.

6 Johtopäätökset

Matematiikkakuvaan kuuluu oppilaan tunnesuhde matematiikkaan, uskomukset ja motivaatio matematiikkaa kohtaan. Matematiikkakuvan osa-alueet ovat keskenään vuorovaikutuksessa, ja ne vaikuttavat suoritukseen matematiikassa sekä matematiikan oppimiseen. (Hannula & Holm, 2018, 133.) Asenteet matematiikkaa kohtaan muuttuvat kielteisiksi kolmannelta luokalta eteenpäin (Tuohilampi & Hannula, 2013).

Opiskelijan suoriutuessa hyvin minäpystyvyys paranee (Schunk & Pajares, 2002, 25). Minäpystyvyys vaikuttaa suorituskyykyyn (Pajares & Miller, 1994; Tuohilampi-Hannula, 2013; Tuominen-Soini ym., 2015). Minäpystyvyys ei kuitenkaan edistä suoritusta, jos suorituksessa vaadittavissa kyvyissä on puutetta (Schunk & Pajares, 2002, 16). Oppimisvaikeutta matematiikassa omaavilla lapsilla oli alhaisemmat minäpystyvyysuskomukset verrattuna lapsiin, joilla ei ollut matematiikassa vaikeuksia (Junger & Andersson, 2013). Minäpystyvyys vaikuttaa oppimismotivaatioon oppilailla, jotka epäilevät omia kykyjään, mikä aiheuttaa heille vaikeutta motivoida itseään (Bandura, 1997, 39).

Matematiikka-ahdistus on kielteinen tunnepohjainen reaktio (Mononen ym., 2017), ja matematiikkaa kohdatessa ahdistunut opiskelija tuntee pelkoa (Hannula, 2012). Matematiikka-ahdistus vaikuttaa kognitiivisiin prosesseihin esimerkiksi häiritsemällä työmuistin resursseja (Ashcraft, 2002). Työmuisti on keskeisessä roolissa matematiikan oppimisessa (Kyttälä & Kanerva, 2018, 220). Heikko suoriutuminen matematiikassa aiheuttaa myöhempää matematiikka-ahdistusta (Ma & Xu, 2004; Kyttälä & Björn, 2010), mutta matematiikka-ahdistuksen vaikutuksesta suoritukseen on kahdenlaisia tuloksia. Matematiikka-ahdistus ei ennustaa myöhempää suoritutumista (Kyttälä & Björn, 2010; Ma & Xu, 2004). Tuominen-Soini ym. (2015, 172) mukaan matematiikka-ahdistus vaikuttaa suoritukseen matematiikassa negatiivisesti.

Matematiikka-ahdistukseen vaikuttavat useat osat matematiikan oppimisessa. Minäpystyvyys vaikuttaa ahdistukseen, mikä taas vaikuttaa heikkoon suoritukseen (Pajares & Kranzler, 1995), ja vahvempaa minäpystyvyyttä omaavat oppilaat kokevat vähemmän matematiikka-ahdistusta (Betz & Hackett, 1983). Tuominen-Soinin ym. (2015, 172) mukaan saavutusorientaatiolla ja matematiikka-ahdistuksella on negatiivinen yhteys.

Oppimismotivaatio on yhteydessä matemaattisten taitojen kehitykseen (Aunola & Nurmi, 2018, 61), ja korkea kiinnostus matematiikkaa kohtaan on yhteydessä hyviin matematiikan taitoihin (Fisher ym., 2012). Pekrunin määrittelemillä saavutustunteilla on yhteyttä motivaatioon. Nautinto ja ylpeys positiivisina aktivoivina tunteina vahvistavat motivaatiota, ja toivottomuus sekä

ikävyystyminen negatiivisina deaktivoivina tunteina heikentävät motivaatiota (Pekrun, 2016, 135).

Pekrunin saavutustunteet luokitellaan saavutustoimintaan liittyviksi tunteiksi, tulevaan tulokseen liittyviksi tunteiksi ja menneeseen tulokseen liittyviksi tunteiksi. Kontrolli-arvo teoriassa saavutustunteille on keskeistä oppilaan kokema kontrolli eli hallinta saavutukseen ja saavutuksen henkilökohtainen arvo eli tärkeys oppilaalle. (Pekrun, 2006.) Lauermanin ym. (2017) mukaan mikäli saavutuksen matematiikassa ollessa henkilökohtaisesti tärkeä, oppilas kokee huolta matematiikasta.

Onnistumisen kokemukset, myönteinen oppimisilmapiiri ja kannustus matematiikan oppimiseen tukevat oppilaan myönteistä matematiikkakuvaa (Hannula & Holm, 2018, 149). Oppimisympäristön tulisi olla oppilasta emotionaalisesti ja motivationaalisesti tukeva (Lauermann ym., 2017). Oppilaiden motivationaalisten taipumusten tunnistaminen on tärkeää (Tuominen ym., 2017, 92). Arjen ilmiöiden matemaattisiin piirteisiin tulisi kiinnittää huomiota mahdollisimman varhain matematiikan opetuksessa (Aunio ym., 2004, 218). Oppilaiden tekemisiin virheisiin tulisi suhtautua luonnollisena osana oppimista (Mononen ym., 2017, 101), ja virheet tulisi käsitellä oppilaiden kanssa, että virheelliset käsitykset osataan muuttaa (Tuohilampi, 2017, 102-103).

Oppilaiden matematiikka-ahdistus laajenee nopeasti, joten varhainen matematiikka-ahdistuksen tunnistaminen sekä matematiikka-ahdistuksen lieventäminen ovat tärkeitä (Ramirez ym., 2012). Oppilaiden epätarkkoja käsityksiä heidän minäpystyvyydestä olisi hyvä tunnistaa (Pajares & Miller, 1994). Minäpystyvyyssuskon nostaminen kehittää emotionaalista hyvinvointia (Schunk & Pajares, 2009, 37).

7 Pohdinta

Oppilaan myönteisen matematiikkakuvan tukeminen mahdollisemman varhaisesta lähtien on erityisen tärkeää. Oppilaan matematiikkakuvan tukeminen on oppilaan matematiikan oppimisen tukemista, sillä oppilaan matematiikkakuva vaikuttaa oppilaan matematiikan oppimiseen sekä oppilaan saavutuksiin matematiikassa. Tulevana erityisopettajana on hyvä tiedostaa, mitkä ovat tekijöitä, jotka heijastuvat matematiikan oppimiseen ja sitä kautta saavutuksiin matematiikassa.

Oppilaan myönteistä matematiikkakuvaa tukiessa opetus on innostavaa ja opetuksessa matematisoidaan arjen ilmiöitä. Oppilaiden tekemiin virheisiin ei suhtauduta kielteisesti, vaan virheitä käytetään osana opetusta. Opettaja kiinnittää huomiota oppilaiden motivationaaliin taipumuksiin ja minäpystyvyydenuskomuksiin sekä opettaja pyrkii mahdollisimman varhain tunnistamaan oppilaan mahdollisen matematiikka-ahdistuksen. Matematiikan opetuksesta ja oppimisesta tulisi jäädä myönteinen kuva oppilaalle, jotta hän ryhtyisi työstämään oman matemaattisen ajattelunsa kehitystä. Samaan aikaan tulisi matematiikan opetuksessa edetä eteenpäin. Ajankäyttö ei saisi muodostua opetusta määrääväksi tekijäksi matematiikan kumulatiivisen luonteen vuoksi.

Minäpystyvyyssuskomuksen, matematiikka-ahdistuksen ja motivationaalisten taipumusten tunnistamisen vuoksi oppilastuntemus nousee tärkeään asemaan. Samoin oppilastuntemus on keskeistä kiinnitettäessä huomiota oppilaiden matemaattisen ajattelun kehittämiseen sekä oppilaiden matemaattisen ajattelun mahdollisten virhekohtien muuttamiseen. Opettajalta vaaditaan syvän oppiaineen hallinnan ja oppilastuntemuksen yhdistämistä. Oikea-aikainen oppilaalle suunnattu tuki nousee keskeiseen asemaan oppilaiden oppimisen tukemiseksi.

Matematiikan vaikeuksia omaavat lapset eroavat työmuistin resursseissa, koska heillä on muita heikompi kapasiteetti käsitellä ja tallentaa tietoa työmuistiin. Oppilaat, joilla on matematiikan vaikeuksia, todennäköisesti menestyvät heikosti matematiikassa. Heikot saavutukset matematiikan oppimisessa aiheuttavat oppilaalle matematiikka-ahdistusta, ja matematiikka-ahdistus häiritsee työmuistin toimintaa. Pohdin, ajautuuko oppilas näin kehään, jossa työmuistiin kohdistetaan enemmän negatiivisia vaikutuksia.

Kandidaatintyössä on käytetty lähteinä lukuisia suomenkielisiä sekä englanninkielisiä tiedejulkaisuja ja oppikirjoja. Pidän kandidaatintutkielmani luotettavana suhteellisen suuren lähteiden

määrän vuoksi sekä sen vuoksi, että kandidaatintutkielmassa useat näkökulmat näkyvät. Kuitenkin kandidaatintyössäni on kyseessä kirjallisuuskatsaus eikä systemaattinen kirjallisuuskatsaus, jossa lähteiden määrä olisi vielä suurempi.

Pro gradu -tutkielmassa olisin kiinnostunut jatkamaan ja syventämään matematiikkakuvan tutkimusta. Olisi mielenkiintoista selvittää entistä syvemmin matematiikkakuvan osa-alueiden yhteyksiä toisiinsa ja selvittää, miten saada tarkempi kuva oppilaan matematiikkakuvasta. Erityisen kiinnostavaa olisi tietää, miten matematiikka-ahdistusta tunnistetaan kouluissa. Ylipääntänsä, miten saada matematiikan oppiminen sellaiseksi, jossa koetaan positiivisia tunteita, kuten oppimisen iloa, olisi tutkimisen arvoista. Samoin olisin kiinnostunut tutkimaan, miten oppimisympäristössä oppilaille annetaan tarpeeksi haastavia tehtäviä, ettei turhautumista tapahdu. Samalla pitäisi kuitenkin huolehtia, ettei liian haastavat tehtävät aiheuta minäpystyvyydenuskomusten heikkenemistä tai matematiikka-ahdistusta.

Lähteet

- Andersson, U. & Lyxell, B. (2007). Working memory deficit in children with mathematical difficulties: A general or specific deficit? *Journal of Experimental Child Psychology* 96, 197–228.
- Aunio, P., Hannula, M. & Räsänen, P. (2004). Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa: Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. (198-221). Niilo Mäki Instituutti.
- Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20, 427–435.
- Aunio, P. & Räsänen, P. (2016). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal*, 24(5), 684–704.
- Aunola, K., Lehtinen, E., Lerkkanen M-K. & Nurmi, J-E. (2004). Developmental Dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96 (4), 699-713.
- Aunola, K. & Nurmi J-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä. Teoksessa Teoksessa Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. (54-69). Niilo Mäki Instituutti.
- Areepattamannil, S., Swe Khine, M. & Al Nuaimi, S. (2017). The big-fish-little-pond effect on mathematics self-concept: Evidence from The United Arab Emirates. *Journal of adolescence*, 59, 148–154.
- Ashcraft, M. (2002). Math anxiety: Personal, Educational and Cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science*, 11(5), 181-185.
- Ashcraft, M. H. & Ridley, K.S. (2005). Math anxiety and its cognitive consequences. A tutorial review. Teoksessa: Cambell, J. *The handbook of mathematical cognition*. (315-327). New York: Psychology Press.
- Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: W. H Freeman and company.
- Barrouillet, P. & Lépine, P. (2005). Working memory and children's use of retrieval to solve addition problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, 91, 183–204.
- Betz, N. & Hackett, G. (1983). The relationship of mathematics self-efficacy expectations to the selection of science-based college majors. *Journal of Vocational Behavior*, 23, 329–345.

- Björn, P., Aro, M. & Koponen, T. Matematiikan oppimisvaikeuksien tutkimusperustainen tuki. Teoksessa: Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. Räsänen, P. (toim.) (184-201). Niilo Mäki Instituutti.
- Chiu, M-S. (2012). The Internal/external frame of reference model, Big-Fish-Little-Pond effect, and combined model for mathematics and science. *Journal of Educational Psychology*, 104(1), 87-107.
- Eysenck, M. & Calvo, M. (1992). Anxiety and Performance: The processing efficiency theory. *Cognition and emotion*, 6(6), 409-434.
- Fisher, P.H., Dobbs-Oates, J. Doctoroff, G. L. & Arnold, D. H. (2012). Early math interest and the development of math skills. *Journal of Educational Psychology*, 104(3), 673-681.
- Fuchs, L. & Fuchs, D. (2002). Mathematical Problem-Solving Profiles of Students with Mathematics Disabilities With and Without Comorbid Reading Disabilities. *Journal of learning disabilities*, 35(6), 564-574.
- Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A 5-year longitudinal study. *Development Psychology*, 47 (6), 1539-1552.
- Hannula, M. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137-161.
- Hannula, M. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 36(2), 165-178.
- Hannula, M. & Holm, M. (2018). Oppilaan matematiikkakuva oppimistuloksena ja oppimisen taustatekijänä. Teoksessa: Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen*. (132-154). Niilo Mäki Instituutti.
- Hirsjärvi, S., Remes, P. & Sajavaara, P. Tutki ja kirjoita. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.
- Huhtala, S. & Laine, A. (2004). ”Matikka ei ole mun juttu”- Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen. Teoksessa: Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) *Matematiikka -näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. (320-346). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Ikäheimo, H. & Risku, A-M. (2004). Matematiikan ensi- ja alkuopetuksesta. Teoksessa: Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) *Matematiikka -näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. (222-240). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Jungert, T. & Andersson, U. (2013). Self-efficacy beliefs in mathematics, native language literacy and foreign language amongst boys and girls with and without mathematic difficulties. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 57(1), 1-15.

- Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T. & Nurmi J-E. (2007). Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation skills and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology*, 97, 220-241.
- Korhonen, T. (2006). Oppimisen neurobiologiset mekanismit. Teoksessa: Hämäläinen, H., Laine, M., Aaltonen, O. & Revonsuo, A. (toim.) *Mieli ja aivot. Kognitiivisen neurotieteen oppikirja.* (200-211). Turun yliopisto: Kognitiivisen neurotieteen tutkimuskeskus.
- Kyttälä, M., Aunio, P. & Hautamäki, J. (2010). Working memory resources in young children with mathematical difficulties. *Cognition and Neurosciences. Scandinavian journal of Psychology*, 51, 1-15.
- Kyttälä, M. & Björn, P. (2010). Prior mathematics achievement, cognitive appraisals and anxiety as predictors of Finnish students' later mathematics performance and career orientation. *Educational Psychology*, 30(4), 431-448.
- Kyttälä, M. & Kanerva, K. (2018). Työmuisti ja matemaattiset taidot. Teoksessa: Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen.* (220-239). Niilo Mäki Instituutti.
- Laine, A., Huhtala, S. & Kaasila, R. (2018). Jakolaskun oppimisesta ja oppimisen ongelmista. Teoksessa: Joutsenlahti, J., Silfverberg, H. & Räsänen, P. (toim.) *Matematiikan opetus ja oppiminen.*(70-85). Niilo Mäki Instituutti.
- Lauermann, F., Eccles, J. & Pekrun, R. Why do children worry about their academic achievement? An expectancy-value perspective on elementary students' worries about their mathematics and reading performance. *Mathematics Education*, 49, 339-354.
- Lerikkanen, M-K., Rasku-Puttonen, H., Aunola, K. & Nurmi, J-E. (2005). Mathematical performance predicts progress in reading comprehension among 7-year olds. *European Journal of Psychology of Education*. Vol xx, num 2, 121-137.
- Linnanmäki, K. (2004). Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. Teoksessa: Räsänen, P., Kuopari, P., Ahonen, T. & Malinen, P. (toim.) *Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* (241-254). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Lyytinen, H., Ahonen, T., Aro, M., Aro, T., Holopainen, L., Närhi, V. & Räsänen, P. (2001). Kehitysneuropsykologinen näkökulma oppimisvaikeuksiin. Teoksessa: Fadjukoff, P., Ahonen, T. & Lyytinen, H. *Oppimisvaikeudet, tutkimuksesta käytäntöön.* (24-58). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Ma, X. & Xu, J. The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis. *Journal of Adolescence*, 27, 165-179.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization.

- Mononen, R., Aunio, P., Hotulainen, R. & Ketonen, R. (2013). Matematiikan osaaminen ensimmäisen luokan alussa. *NMI-bulletin*, 23(4), 12-27.
- Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J. & Tapola, A. (2017). *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Nie, Y., Lau, S. & Liao, A. K. (2011). Role of academic self-efficacy in moderating the relation between task importance and test anxiety. *Learning and individual differences*, 21, 736-741.
- Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus.
- Pajares, F. & Kranzler, J. (1995). Self-efficacy Beliefs and General mental ability in mathematical problem-solving. *Contemporary Educational Psychology* 20, 426-443.
- Pajares, F. & Miller, M. D. (1994). Self-efficacy and self-concept beliefs in Mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of Educational Psychology*, 86(2), 193-203.
- Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries and implications for educational research and practice. *Educational Psychology Review*, 18, 315-341.
- Pekrun, R. (2016). Academic emotions. Teoksessa: K.R Wentzel & D.B. Miele (toim.) *Handbook of motivation at school*, second edition, 120-144
- Pekrun, R. & Stephens, E. (2010). Achievement emotions: A control-value approach. *Social and personality Psychology Compass*, 4/4, 238-255.
- Ramirez, G., Gunderson, E., Levine, S. & Beilock, S. (2012). Math anxiety, working memory and math achievement in early elementary school. *Journal of cognition and development*. 14(2), 187-202.
- Ryan, R. & Deci, E. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology*, 23, 54-67.
- Räsänen, P. & Närhi, V. (2013). Heikkojen oppijoiden koulupolku. Teoksessa: Metsämuuronen, J. (toim.). *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkäjäsenarviointi vuosina 2005-2012. Koulutuksen seurantaraportti 2013:4*. (173-230). Opetushallitus.
- Salmela-Aro, K. (2018). Kouluinto ja koulu-uupumus. Teoksessa: Salmela-Aro, K. (toim.) *Motivaatio ja oppiminen*. (25-46). Jyväskylä: PS-kustannus.
- Salminen, A. (2011). Mikä kirjallisuuskatsaus? Johdatus kirjallisuuskatsauksen tyyppisiin ja hallintotieteellisiin sovelluksiin. Vaasan yliopiston julkaisuja.
- Schunk, D. & Pajares, F. (2002). The development of academic self-efficacy. Teoksessa: A.Wigfield, A. & Escaltes, J.S. (toim.) *Development of achievement Motivation*. eBook (16-29). San Diego: Academic Press.

- Schunk, D. H. & Pajares, F. (2009). Self-efficacy theory. Teoksessa: Wentzel, K. & Wigfield, A. (toim.) Handbook of motivation at school. (35-53). New York: Taylor & Francis Group.
- Tapola, A. & Niemivirta, M. (2008). The role of achievement goal orientations in students' perceptions of and preferences for classroom environment. *British Journal of Educational Psychology*, 78, 291-312.
- Terveiden ja hyvinvoinnin laitos. (2011). <https://thl.fi/documents/10531/1449887/ICD-10.pdf/8091c7cc-fda6-4e86-8ef9-7790d8d6a1a2> (viitattu 26.4.2019).
- Tuohilampi, L., & Hannula, M. (2013). Matematiikkaan liittyvien asenteiden kehitys sekä asenteiden ja osaamisen välinen vuorovaikutus 3., 6. ja 9. luokalla. Teoksessa: Metsämuuronen, J. (toim.) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012. (231-254). Koulutuksen seurantaraportit 2013:4.
- Tuohilampi, L. (2017) Matematiikanäkö. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Tuominen, H., Pulkka, A-T., Tapola, A. & Niemivirta, M. (2017). Tavoiteorientaatiot, oppiminen ja hyvinvointi. Teoksessa: Salmela-Aro, K & Nurmi, J-E. (toim.) Mikä meitä liikuttaa, motivaatiopsykologian perusteet. (80-99). Jyväskylä: PS-kustannus.
- Tuominen-Soini, K., Salmela-Aro, K. & Niemivirta, M. (2015). Motivationaalisia polkuja matematiikan suoritukseen. Teoksessa: Välijärvi, J. & Kupari, P. Millä eväillä osaaminen uuteen nousuun? Pisa 2012 tutkimustuloksia. (164-177). Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2015:6.
- Turner, J., Midgley, C., Meyer, D., Gheen, M., Anderman, E., Kang, Y. & Patrick, H. (2002). The classroom environment and students' reports of avoidance strategies in mathematics: A multimethod study. *Journal of Educational Psychology*. 94(1), 88-106.
- Vasalampi, K. (2017). Itsemääräämisteoria. Teoksessa K. Salmela-Aro & J-E. Nurmi (toim.) Mikä meitä liikuttaa, motivaatiopsykologian perusteet. (54-65). Jyväskylä: PS-kustannus.
- Vauras, M., Salo, A-E. & Kajamies, A. (2018). Motivationaalisesti haavoittuvat lapsen kasvun eri puolilla. Teoksessa: Salmela-Aro, K. (toim.) Motivaatio ja oppiminen. (77-100) Jyväskylä: PS-kustannus.
- Viljaranta, J., Tolvanen, A., Aunola, K. & Nurmi, J-E. (2014). The developmental dynamics between interest, self-concept of ability and academic performance. *Scandinavian Journal of Educational Research*. 58(6), 734-756.